Znaczenie zbiorów modeli oraz cykliczności i normalności macierzy w teorii układów dynamicznych

T. Kaczorek

Nowe technologie wytwarzania elementów i układów stworzyły zapotrzebowanie na nowe narzędzia matematyczne do opisu procesów dynamicznych zachodzących w tych elementach i układach. Do takich nowych narzędzi matematycznych należy rachunek ułamkowego rzędu (Fractional Calculus). Podstawowym pojęciem w tym rachunku jest pojęcie pochodno-całki ułamkowego rzędu. Do najczęściej dziś używanych pojęć pochodno-całki należy pojęcie wprowadzone przez Caputo. Zgodnie z jego definicją pochodno-całka ułamkowego rzędu α jest określona zależnością

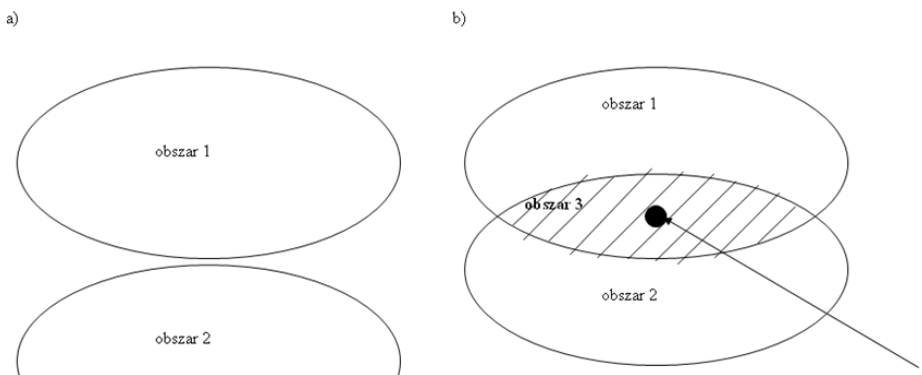
(1)

$$ {}_0D_t^{\alpha} f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_0^t \frac{f^{(n)}(\tau)}{(t-\tau)^{\alpha-n+1}} d\tau, \quad f^{(n)}(\tau) = \frac{d^n f(\tau)}{d\tau^n}, \quad n-1 < \alpha < n \in N = \{1,2,...\} $$

Mamy więc jedno pojęcie, które dla $\alpha > 0$ jest pochodną, a dla $\alpha < 0$ jest całką. Zauważmy, że w tej definicji pochodna,podobnie jak całka jest określona na przedziale,a nie w punkcie,jak to ma miejsce w klasycznej definicji pochodnej. W analizie dynamiki procesów opartej na pochodno-całce mamy zbiór modeli,w którym istotnym parametrem jest rząd ułamkowy modelu

Często rozpatrywane zadanie można rozłożyć na kilka prostszych podzadań. Dla uproszczenia rozwiązań załóżmy, że rozpatrywane zadanie daje się rozłożyć na dwa podzadania – na przykład dwa typy równań, z których każde ma wiele rozwiązań..

Niech podzadanie 1, przy przyjętych założeniach, ma zbiór rozwiązań przedstawiony schematycznie na płaszczyźnie w postaci obszaru 1, a podzadanie 2 – zbiór rozwiązań w postaci obszaru 2.



Wystąpić mogą następujące dwa przypadki.

W przypadku 1-szym (rys. 1a) obszary te nie mają części wspólnej. Oznacza to, że przy przyjętych założeniach zadanie to nie ma rozwiązania. Aby znaleźć możliwe rozwiązanie tego zadania należy zmienić przyjęte założenia.

W przypadku 2-gim (rys. 1b) obszary mają część wspólną (obszar zakreskowany 3).
W tym przypadku zadanie ma wiele rozwiązań. Projektant ma możliwość uwzględnienia nowych dodatkowych założeń ograniczających obszar rozwiązań zadania. Pojawia się dodatkowe pytanie, które z rozwiązań z obszaru 3 należy wziąć do dalszych rozważań, na przykład do syntezy sterowania.
W syntezie układów odpornych na małe odchylenia wartości parametrów od ich wartości nominalnych (robust) często przyjmuje się model odpowiadający punktowi ciężkości zbioru (rys. 1b). Z podobnym zagadnieniem spotykamy się tworząc model układu na podstawie danych wziętych z eksperymentu. W tym przypadku otrzymujemy zwykle nie jeden, ale zbiór modeli. Pojawia się pytanie, który model z tego zbioru jest modelem reprezentatywnym, opisującym prawidłowo własności dynamiczne obiektu rzeczywistego. Jakimi kryteriami należy się kierować przy wyborze modelu reprezentatywnego ze zbioru modeli ?
Kryteriami takimi mogą być dla modelu w przestrzeni stanu cykliczność macierzy stanu, a dla modeli transmitacyjnych- normalność macierzy transmitancji operatorowych.
Macierz kwadratową A nazywamy cykliczną, jeżeli jej wielomian charakterystyczny $\varphi(s)=\det[Is-A]$ pokrywa się z jej wielomianem minimalnym $\Psi(s)$. Każdą macierz transmitancji układu liniowego można przedstawić w postaci standardowej $T(s)=\dfrac{P(s)}{d(s)}, P(s)$ jest macierzą wielomianową, a $d(s)$ jest wielomianem, będącym najmniejszym wspólnym mianownikiem.
Macierz $T(s)$ (oraz odpowiadający jej układ) nazywamy normalną (normalnym), jeżeli każdy niezerowy minor stopnia drugiego macierzy wielomianowej $P(s)$ dzieli się bez reszty przez wielomian $d(s)$.
Weźmy pod uwagę następujące dwie macierz A_1 i A_2 różniące się tylko wartością jednego elementu

(1)
$$A_1=\begin{bmatrix}2 & 1 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}, A_2=\begin{bmatrix}2 & 1 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{bmatrix}$$

Macierz A_1 jest cykliczna, gdyż jej wielomian charakterystyczny

$$\varphi(s)=\det[Is-A_1]=\begin{vmatrix}s-2 & -1 & 0\\ 0 & s-2 & 0\\ 0 & 0 & s-1\end{vmatrix}=(s-2)^2(s-1)$$

pokrywa się z jej wielomianem minimalnym $\Psi(s)$,a jej postać Smitha jest równa

$$[Is-A_1]_S=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & (s-2)^2(s-1)\end{bmatrix}$$

Ponadto macierz odwrotna ma postać

(2)
$$[Is-A_1]^{-1}=\frac{1}{(s-2)^2(s-1)}\begin{bmatrix}(s-1)(s-2) & 1 & 0\\ 0 & (s-1)(s-2) & 0\\ 0 & 0 & (s-2)\end{bmatrix}=\frac{P_1(s)}{d_1(s)}$$

a niezerowe minory stopnia drugiego macierzy $P_1(s)$ są równe

$$M_{11}=(s-1)(s-2)^3, M_{12}=(s-1)(s-2)^2, M_{22}=(s-1)(s-2)^3, M_{33}=(s-1)^2(s-2)^2$$

i dzielą się bez reszty przez wielomian $d_1(s)$. Macierz (2) jest więc macierzą normalną, Macierz A_2 nie jest macierzą cykliczna, gdyż jej wielomian charakterystyczny

$$\varphi(s) = \det[Is - A_2] = \begin{vmatrix} s-2 & -1 & 0 \\ 0 & s-2 & 0 \\ 0 & 0 & s-2 \end{vmatrix} = (s-2)^3$$

nie pokrywa się z jej wielomianem minimalnym $\varphi(s) = (s-2)^2$,a jej postać Smitha jest równa

$$[Is - A_2]_S = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & s-2 & 0 \\ 0 & 0 & (s-2)^2 \end{bmatrix}$$

Ponadto macierz odwrotna

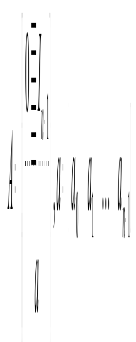
(3) $$[Is - A_2]^{-1} = \frac{1}{(s-2)^2} \begin{bmatrix} s-2 & s-1 & 0 \\ 0 & s-2 & 0 \\ 0 & 0 & (s-2)^2 \end{bmatrix} = \frac{P_2(s)}{\bar{d}_2(s)}$$

a niezerowy minor stopnia drugiego $M_{21} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & s-2 \end{vmatrix} = s-2$ macierz $P_2(s)$ nie dzieli się przez wielomian $d_2(s)$. Macierz (3) nie jest więc macierzą normalną.
Klasa układów normalnych jest bardzo szeroka i odgrywa podstawową rolę w teorii układów dynamicznych. Przykładem układów normalnych są obwody elektryczne,układy mechaniczne,hydrauliczne,pneumatyczne,procesy biologiczne,ekonomiczne itp.

Macierz $A \in R^{n \times n}$ nazywamy strukturalnie stabilną wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje liczba dodatnia ε_0 taka, że dla dowolnej macierz $B \in R^{n \times n}$ oraz liczby ε spełniającej warunek $|\varepsilon| < \varepsilon_0$ wszystkie macierze $A + B\varepsilon$ są macierzami stabilnymi.

Twierdzenie Macierz cykliczna $A \in R^{n \times n}$ jest macierzą strukturalnie stabilną.

Macierze niecykliczne nie są strukturalnie stabilne, ale dla macierzy niecyklicznej $A \in R^{n \times n}$ można zawsze dobrać macierz $B \in R^{n \times n}$ oraz liczbę małą ε ($|\varepsilon| > 0$) takie, że suma $A + B\varepsilon$ jest macierzą cykliczną.
Tylko dla pewnego szczególnego doboru macierzy B oraz ε suma $A + B\varepsilon$ jest macierzą niecykliczną.
Jak wiadomo macierz w postaci kanonicznej Frobeniusa



jest macierzą cykliczną dla dowolnych wartości współczynników $a_0, a_1, a_2, \dots, a_{n-1}$.
Na przykład macierz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & a \end{bmatrix}$$

jest macierzą cykliczną dla wszystkich wartości współczynnika $a \neq 1$, a macierzą niecykliczną tylko dla $a = 1$.

Jeżeli $\Delta \mathbf{A} \in R^{n \times n}$ traktować jako odchylenie (niedokładność) od nominalnej macierzy $A \in R^{n \times n}$ i przyjąć $\varepsilon B = \Delta A$, to zgodnie z twierdzeniem macierz $A + \Delta A$ jest również cykliczna, gdy macierz A jest cykliczna.

Z powyższych rozważania wynikają następujące wnioski

1) Rachunek ułamkowego rzędu jest obiecującym nowym narzędziem analizy procesów dynamicznych.
2) Ułamkowy rząd modelu jest ważnym parametrem charakteryzującym zbiór modeli procesów dynamicznych.
3) Synteza układów dynamicznych oparta na zbiorach rozwiązań jest nową ogólną koncepcją godną upowszechnienia.
4) Cykliczność macierzy stanu jest ważnymkryterium praktycznej przydatności modelu.
5) Normalność macierzy transmitancji powinna być podstawowym kryterium wyboru modelu ze zbioru możliwych modeli.